

Austrian Federal Competition For Advanced Students, P2, 2021

www.artofproblemsolving.com/community/c2015066

by parmenides51

– Day 1

- 1 Let a, b and c be pairwise different natural numbers. Prove $\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq abc + a + b + c$.
When does equality holds?

(Karl Czakler)

- 2 Mr. Ganzgenau would like to take his tea mug out of the microwave right at the front. But Mr. Ganzgenau's microwave doesn't really want to be very precise play along. To be precise, the two of them play the following game:

Let n be a positive integer. The turntable of the microwave makes one in n seconds full turn. Each time the microwave is switched on, an integer number of seconds turned either clockwise or counterclockwise so that there are n possible positions in which the tea mug can remain. One of these positions is right up front.

At the beginning, the microwave turns the tea mug to one of the n possible positions. After that Mr. Ganzgenau enters an integer number of seconds in each move, and the microwave decides either clockwise or counterclockwise this number of spin for seconds.

For which n can Mr. Ganzgenau force the tea cup after a finite number of puffs to be able to take it out of the microwave right up front?

(Birgit Vera Schmidt)

Herr Ganzgenau möchte sein Teehäferl ganz genau vorne aus der Mikrowelle herausnehmen. Die Mikrowelle von Herrn Ganzgenau möchte da aber so ganz genau gar nicht mitspielen.

Ganz genau gesagt spielen die beiden das folgende Spiel:

Sei n eine positive ganze Zahl. In n Sekunden macht der Drehteller der Mikrowelle eine vollständige Umdrehung. Bei jedem Einschalten der Mikrowelle wird eine ganzzahlige Anzahl von Sekunden entweder im oder gegen den Uhrzeigersinn gedreht, sodass es n mögliche Positionen gibt, auf denen das Teehäferl stehen bleiben kann. Eine dieser Positionen ist ganz genau vorne.

Zu Beginn dreht die Mikrowelle das Teehäferl auf eine der n möglichen Positionen. Danach gibt Herr Ganzgenau in jedem Zug eine ganzzahlige Anzahl von Sekunden ein, und die Mikrowelle entscheidet, entweder im oder gegen den Uhrzeigersinn diese Anzahl von Sekunden lang zu drehen.

Für welche n kann Herr Ganzgenau erzwingen, das Teehäferl nach endlich vielen Zügen ganz genau vorne aus der Mikrowelle nehmen zu können?

(Birgit Vera Schmidt)

- 3 Find all triples (a, b, c) of natural numbers a, b and c , for which $a^{b+20}(c-1) = c^{b+21} - 1$ is satisfied.

(Walther Janous)

– Day 2

- 4** Let a be a real number. Determine all functions $f : R \rightarrow R$ with $f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + af(x)y$ for all $x, y \in R$.

(Walther Janous)

- 5** Let $ABCD$ be a convex cyclic quadrilateral with diagonals AC and BD . Each of the four vertexes are reflected across the diagonal on which they do not lie.
- (a) Investigate when the four points thus obtained lie on a straight line and give as simple an equivalent condition as possible to the cyclic quadrilateral $ABCD$ for it.
- (b) Show that in all other cases the four points thus obtained lie on one circle.

(Theresia Eisenkölbl)

- 6** Let p be an odd prime number and M a set derived from $\frac{p^2+1}{2}$ square numbers. Investigate whether p elements can be selected from this set whose arithmetic mean is an integer.

(Walther Janous)
