

Austrian Federal Competition For Advanced Students, Part 1, 2022

www.artofproblemsolving.com/community/c3164483

by parmenides51

- 1 Prove that for all positive real numbers x, y and z , the double inequality

$$0 < \frac{1}{x+y+z+1} - \frac{1}{(x+1)(y+1)(z+1)} \leq \frac{1}{8}$$

holds. When does equality hold in the right inequality?

(Walther Janous)

- 2 The points A, B, C, D lie in this order on a circle with center O . Furthermore, the straight lines AC and BD should be perpendicular to each other. The base of the perpendicular from O on AB is F . Prove $CD = 2OF$.

(Karl Czakler)

- 3 Each person stands on a whole number on the number line from 0 to 2022. In each turn, two people are selected by a distance of at least 2. These go towards each other by 1. When no more such moves are possible, the process ends.

Show that this process always ends after a finite number of moves, and determine all possible configurations where people can end up standing. (whereby is for each configuration is only of interest how many people stand at each number.)

(Birgit Vera Schmidt)

Bei jeder ganzen Zahl auf dem Zahlenstrahl von 0 bis 2022 steht zu Beginn eine Person.

In jedem Zug werden zwei Personen mit Abstand mindestens 2 ausgewählt. Diese gehen jeweils um 1 aufeinander zu. Wenn kein solcher Zug mehr möglich ist, endet der Vorgang.

Man zeige, dass dieser Vorgang immer nach endlich vielen Zügen endet, und bestimme alle möglichen Konfigurationen, wo die Personen am Ende stehen können. (Dabei ist für jede Konfiguration nur von Interesse, wie viele Personen bei jeder Zahl stehen.)

- 4 Find all triples (p, q, r) of prime numbers for which $4q - 1$ is a prime number and

$$\frac{p+q}{p+r} = r-p$$

holds.

(Walther Janous)
